MATERIAUX

Essai de traction – Loi de HOOKE

Chapitre 7

EXERCICES

Feuille n°1

CORRECTION

EXERCICE 1 (essai de traction)

a) Rappeler rapidement le déroulé d'un essai de traction.

Une éprouvette de dimensions connues est maintenue par ses extrémités. On tire lentement dessus jusqu'à la rupture.

b) Donner les deux grandeurs qui sont en permanence mesurées (acquises) pendant l'essai.

A chaque instant, on mesure la ***force de traction*** F *et* ***l'allongement*** ΔL.

c) Donner le nom des deux domaines qu'on retrouve très classiquement dans une courbe de traction et dire ce qui les caractérise.

On distingue les domaines :

⇒ ***ELASTIQUE****, caractérisé par une proportionnalité entre l'effort et l'allongement ; si on relâche l'effort, l'éprouvette retrouve ses dimensions initiales,*

⇒ ***PLASTIQUE****, plus ou moins étendu selon que le matériau est fragile ou ductile ; si on relâche l'effort (l'éprouvette n'étant pas encore complètement cassée), on observe une déformaton permanente ; la pièce est fragilisée.*

d) Donner la loi qui résulte de l'essai de traction (nom et formule) et préciser son domaine de validité.

Il s'agit de la ***loi de Hooke*** *:* $\sigma = E \cdot \varepsilon$ *; elle caractérise le* ***domaine élastique*** *puisque c'est l'équation de droite de ce domaine.*

e) On considère une craie et un carambar ; qui est ductile ? Qui est fragile ? Dire pourquoi.

Sollicitée jusqu'à la rupture, une craie va casser net, avec peu de déformation plastique. ***La craie est donc fragile****.*

Sollicitée jusqu'à la rupture, un carambar va s'allonger de façon notable ; il s'agit d'une déformation plastique assez importante qui fait que ***le carambar est plutôt ductile*** *(mais ça dépend beaucoup de la température…).*

f) Expliquer la différence entre « allongement » et « déformation ».

L'allongement *correspond à une variation de distance entre deux points pris dans la matière d'un solide. Dans le cas de la traction, il s'agit d'une longueur, notée* ΔL *; elle s'exprime légalement en* m *mais on utilise souvent le* mm.

La déformation*, notée* ε*, rapporte l'allongement* ΔL *à la longueur initiale* L_0 *(à vide, sans chargement) ; on a* $\varepsilon = \Delta L / L_0$.

g) Une contrainte est-elle homogène à une pression ? Donner ses unités légale et pratique utilisée en RDM.

La contrainte, notée σ *est par définition égale à la force* F *divisée par la surface* S *qui l'encaisse :* $\sigma = F / S$.

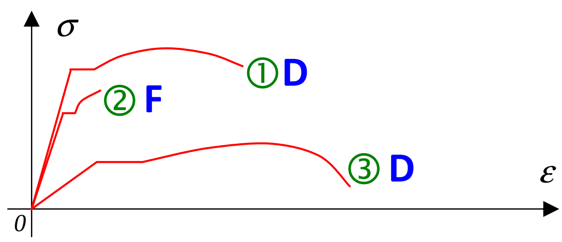
La contrainte est donc bien homogène à une pression ; à ce titre, son unité légale est celle de la pression, c'est-à-dire le Pa *(*$1_{Pa} = 1\ N \cdot m^{-2}$*). Dans la pratique, on l'exprime souvent en* MPa*, avec une force en* N *et une aire en* mm^2.

h) Identifier sur les courbes de traction ci-contre les matériaux :

① C45 ② 14 NiCr11 ③ AU 4G

(Reporter les numéros)

i) Dire (sur les courbes) s'ils sont fragiles (F) ou ductiles (D).



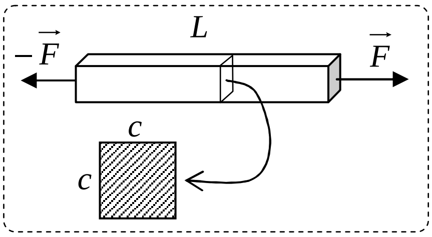
EXERCICE 2 (loi de Hooke)

a) Rappeler la formule donnant la contrainte pour une sollicitation en traction et préciser les unités.

La contrainte normale dans une section droite est donnée par définition par la relation $\sigma = F / S$ *où :*

- $\Rightarrow$ σ *est la contrainte en* MPa,
- $\Rightarrow$ F *est l'effort de traction en* N,
- $\Rightarrow$ S *est l'aire de la section droite en* mm^2.

Une barre en acier de section transversale carrée de côté $c = 8\ mm$ et de longueur $L = 120\ mm$ subit un effort de traction $F = 25800\ N$.



b) Calculer la contrainte régnant dans la matière de la barre.

Calcul de la section droite qui est sollicitée : $S = c^2 = 8^2 = 64\ mm^2$

Calcul de la contrainte : $\sigma = F / S = 25800 / 64 = 403{,}1\ MPa$

c) A partir de l'annexe A4, choisir la première nuance d'acier suffisante pour que le matériau travaille dans son domaine élastique ($\sigma \leq R_e$).

Il faut un acier dont la limite élastique soit au moins égale à la contrainte qui vient d'être calculée ; le premier acier qui convient est la nuance « C65 » avec $R_e = 500\ MPa$.

On remplace la section carré de côté $c = 8\ mm$ par une section circulaire de diamètre d.

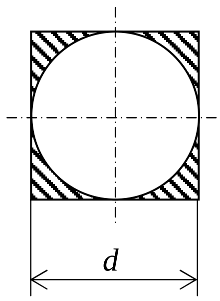
d) Calculer le diamètre d pour que la section droite subisse la même contrainte.

$\sigma = F / S \quad \Leftrightarrow \quad S = F / \sigma$ *avec* $\sigma = 403{,}1\ MPa$ *et* $F = 25800\ N$

De plus, l'aire de la section circulaire est reliée au diamètre pat la relation $S = \pi \cdot d^2 / 4$

Soit : $\dfrac{\pi \cdot d^2}{4} = \dfrac{F}{\sigma} \quad \Leftrightarrow \quad d = \sqrt{\dfrac{4 \cdot F}{\pi \cdot \sigma}} = \sqrt{\dfrac{4 \times 25800}{\pi \times 403{,}1}} = 9{,}03\ mm$

e) Expliquer pourquoi le diamètre d est un peu plus grand que le côté c.



Dans le cas où le diamètre du cercle est égal au côté du carré (voir figure ci-contre), on constate que l'aire du cercle est plus petite que celle du carré (la différence étant les zones hachurées).
Or, pour générer la même contrainte, il faut une surface identique ; ceci explique le fait que le diamètre du cercle est plus grand que le côté du carré.

f) Calculer l'allongement ΔL de la barre.

Il faut passer par la loi de Hooke : $\sigma = E \cdot \varepsilon$. *Pour l'acier C65, on a (annexe A4) :* $E = 210000\ MPa$

Par ailleurs, la déformation est donnée par $\varepsilon = \Delta L / L$ *avec* $L = 120\ mm$ (longueur à vide donnée par l'énoncé)

On a donc :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \sigma = E \cdot \frac{\Delta L}{L} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta L = \frac{L \cdot \sigma}{E} = \frac{120 \times 403{,}1}{210000} = 0{,}23\ mm$$

EXERCICE 3

Une barre en « AU 5 GT » (alliage d'aluminium) de section carrée subit un effort $F = 3500\ daN$.

a) Donner (annexe A4) les caractéristiques E et R_e du matériau considéré.

$E = 70000\ MPa$ *et* $R_e = 200\ MPa$

b) Calculer le côté c de la section de la barre pour que la contrainte dans la matière soit égale à 80 % de la limite élastique.

On impose $\sigma = 0{,}8 \cdot R_e = 0{,}8 \times 200 = 160\ MPa$

Par définition, la contrainte est donnée par : $\sigma = \dfrac{F}{S}$ *avec* $S = c^2$

soit : $\sigma = \dfrac{F}{c^2} \quad \Leftrightarrow \quad c = \sqrt{\dfrac{F}{\sigma}} = \sqrt{\dfrac{35000}{160}} = 14{,}8\ mm$

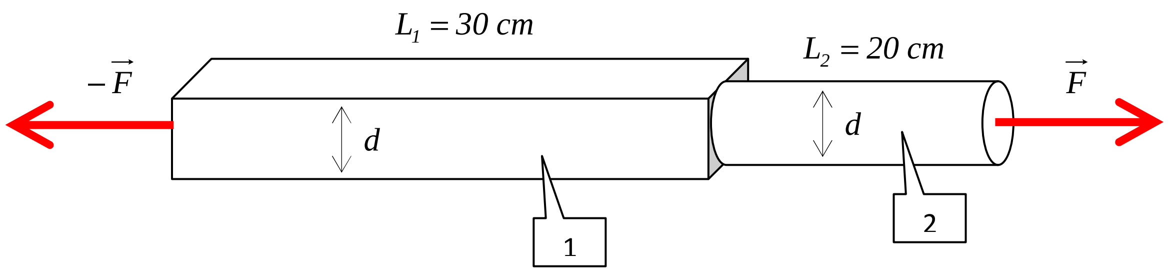
c) Calculer la longueur à vide L_0 de la poutre pour que l'allongement soit $\Delta L = 0{,}5\ mm$.

Il faut passer par la loi de Hooke :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \sigma = E \cdot \frac{\Delta L}{L} \quad \Leftrightarrow \quad L = \frac{\Delta L \cdot E}{\sigma} = \frac{0{,}5 \times 70000}{160} = 218{,}8\ mm$$

EXERCICE 4 (loi de Hooke) (un peu difficile)

Un parallélépipède rectangle en alliage d'aluminium (AZ 5 GU) est collé à un cylindre en acier (14 NiCr 11).
Le diamètre du cylindre est égal au côté carré de la base du parallélépipède.
L'ensemble est soumis à une force de traction F.



a) Peut-on dire sans calcul qui cassera en premier si la force de traction est trop grande ? justifier la réponse.

On consulte l'annexe A4 pour récupérer les caractéristiques des matériaux mis en jeu :

Matériau	$E\ (MPa)$	$R_e\ (MPa)$
AZ 5 GU	70000	440
14 NiCr 11	210000	830

L'alliage d'aluminium (AZ 5 GU) a une limite élastique moindre que celle de l'acier (14 NiCr 11) ; ceci signifie qu'à section égale, l'alliage d'aluminium cassera avant l'acier MAIS le cylindre en acier a obligatoirement une section plus petite que celle de la base carrée ; les sections n'étant pas égales, ***il est difficile de conclure quoi que ce soit sans poser les calculs…***

On donne $F = 2000\ daN$.

b) Calculer la dimension d pour faire en sorte que la contrainte dans la matière du moins résistant des deux **solides** soit égale à sa limite élastique.

→ *Pour le parallélépipède (1) : à la limite, on a* $\sigma_1 = R_{e1}$ *avec* $\sigma_1 = \frac{F}{S_1} = \frac{F}{d^2}$

soit $R_{e1} = \frac{F}{d^2} \Leftrightarrow d = \sqrt{\frac{F}{R_{e1}}} = \sqrt{\frac{20000}{440}} = 6{,}74\ mm$

→ *Pour le cylindre (2) : à la limite, on a* $\sigma_2 = R_{e2}$ *avec* $\sigma_2 = \frac{F}{S_2} = \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2}$

soit $R_{e2} = \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2} \Leftrightarrow d = \sqrt{\frac{4 \cdot F}{\pi \cdot R_{e2}}} = \sqrt{\frac{4 \times 20000}{\pi \times 830}} = 5{,}54\ mm$

On retiendra donc $d = 6{,}74\ mm$

c) Calculer alors l'allongement total de l'ensemble.

L'allongement total est égal à la somme des allongements des deux solides collés : $\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2$

→ *Calcul de* ΔL_1 *:*

$$\sigma_1 = E_1 \cdot \varepsilon_1 \Leftrightarrow \frac{F}{S_1} = E_1 \cdot \frac{\Delta L_1}{L_1} \Leftrightarrow \Delta L_1 = \frac{L_1 \cdot F}{E_1 \cdot S_1} = \frac{L_1 \cdot F}{E_1 \cdot d^2} = \frac{300 \times 20000}{70000 \times 6{,}74^2} = 1{,}89\ mm$$

→ *Calcul de* ΔL_2 *:*

$$\sigma_2 = E_2 \cdot \varepsilon_2 \Leftrightarrow \frac{F}{S_2} = E_2 \cdot \frac{\Delta L_2}{L_2} \Leftrightarrow \Delta L_2 = \frac{L_2 \cdot F}{E_2 \cdot S_2} = \frac{4 \cdot L_1 \cdot F}{E_1 \cdot \pi \cdot d^2} = \frac{4 \times 200 \times 20000}{210000 \times \pi \times 6{,}74^2} = 0{,}53\ mm$$

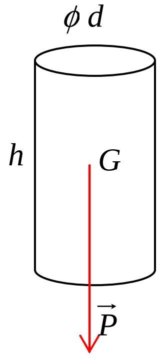
→ *Calcul de* ΔL *:*

$$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2 = 1{,}89 + 0{,}53 = 2{,}42\ mm$$

EXERCICE 5 (un peu difficile)

On considère un cylindre en béton ($E = 40000\ MPa$, $R_e = 320\ MPa$ et $\rho = 2200\ kg \cdot m^{-3}$) de diamètre d .

Une de ses deux extrémités est posée sur le sol horizontal terrestre ($g = 9{,}81\ m \cdot s^{-2}$).



a) Faire une petite figure de principe pour expliquer la situation.

b) Montrer que la hauteur maximale h qu'il peut avoir pour qu'il résiste à son poids propre est donnée par la relation $h = \dfrac{R_e}{\rho \cdot g}$.

Le poids total du cylindre de béton constitue la charge que devra supporter la surface d'appui (celle sur laquelle la contrainte est la plus élevée.

Il faut donc déjà exprimer la charge (le poids) en fonction des données disponibles :

$$P = m \cdot g = \rho \cdot V \cdot g = \rho \cdot h \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot g$$

Ensuite, on se place à la limite de la condition de résistance qui veut que la contrainte σ *subie par la matière soit égale (à la limite) à la résistance élastique* R_e *du matériau :* $\sigma = R_e$ *.*

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{P}{S} = \frac{4 \cdot P}{\pi \cdot d^2} = \frac{4 \cdot \rho \cdot h \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot g}{\pi \cdot d^2} = \rho \cdot h \cdot g$$

$$\sigma = R_e \quad \Rightarrow \quad R_e = \rho \cdot h \cdot g \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{h = \frac{R_e}{\rho \cdot g}}$$

c) Vérifier l'homogénéité de l'expression de h (analyse dimensionnelle).

h *est une longueur ; son équation aux dimensions est donc :* $[h] = L$ *.*

Pour que l'équation soit homogène, il suffit donc que le membre de droite soit lui aussi homogène à une longueur ; c'est ce que nous allons chercher à vérifier :

$$\left[\frac{R_e}{\rho \cdot g}\right] = \frac{[R_e]}{[\rho \cdot g]} = \frac{[R_e]}{[\rho] \cdot [g]} \qquad (1)$$

→ R_e *est la limite élastique ; elle s'exprime dans la pratique en* MPa *, légalement en* Pa *, elle est donc égale au rapport d'une force par une surface :* $R_e = \dfrac{F}{S}$ *. Par ailleurs, une force est égale au produit d'une masse par une accélération :*

$F = m \cdot a$ *soit :* $R_e = \dfrac{m \cdot a}{S}$ *, d'où la dimension de* R_e *:*

$$[R_e] = \left[\frac{m \cdot a}{S}\right] = \frac{[m \cdot a]}{[S]} = \frac{[m] \cdot [a]}{[S]} = \frac{(M) \cdot (L \cdot T^{-2})}{L^2} = M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot L^{-2} = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$$

→ ρ *est la masse volumique ; elle s'exprime légalement en* $kg \cdot m^{-3}$ *, d'où la dimension de* ρ *:*

$$[\rho] = \left[\frac{m}{V}\right] = \frac{M}{L^3} = M \cdot L^{-3}$$

→ g *est l'intensité du champ de pesanteur, homogène à une accélération, d'où la dimension de* g *:*

$$[g] = L \cdot T^{-2}$$

L'équation aux dimensions (1) donne alors :

$$\frac{[R_e]}{[\rho]\cdot[g]}=\frac{M\cdot L^{-1}\cdot T^{-2}}{\left(M\cdot L^{-3}\right)\cdot\left(L\cdot T^{-2}\right)}=M\cdot L^{-1}\cdot T^{-2}\cdot\left(M^{-1}\cdot L^{+3}\right)\cdot\left(L^{-1}\cdot T^{+2}\right)=M^{1-1}\cdot T^{-2+2}\cdot L^{-1+3-1}=L$$

On a donc $[h]=\left[\frac{R_e}{\rho\cdot g}\right]$

⇨ ***L'équation est bien homogène.***

d) Expliquer pourquoi la hauteur h ne dépend pas du diamètre d.

On pourrait penser que plus le diamètre d du cylindre est important, moins la hauteur h le sera car le poids augmente si on augmente le diamètre. Mais, en augmentant le diamètre, on augmente aussi l'aire de la section sur laquelle se répartie la contrainte ; ces deux effets se compensent très exactement et c'est pourquoi les diamètres se simplifient dans le calcul ci-dessus ; ***la hauteur maximale h ne dépend donc pas du diamètre d du cylindre****.*

e) Calculer la valeur numérique de h.

$$h=\frac{R_e}{\rho\cdot g}=\frac{320\cdot 10^6}{2200\times 9{,}81}=14827\ m$$

ATTENTION AUX UNITES !!

A noter qu'une telle hauteur n'a pas beaucoup de sens d'un point de vue pratique (aucun intérêt a priori de fabriquer une colonne de béton de 15 km de haut).